

# La *Suma de la Art de Arismètica* de FRANCESC SANTCLIMENT

Josep Pla i Carrera

Facultat de Matemàtiques  
Universitat de Barcelona

Biblioteca de Catalunya  
Dijous, 15 de maig de 2008

## La Suma de la Art de Arismètica

- 1 Introducció històrico-metodològica
- 2 Discussió dels antecedents possibles
- 3 Contingut matemàtic del text de Santcliment
- 4 Cloenda

## Introducció històrico-metodològica

Per mñja del diuinal adiutori fonch aca/  
 bada la suma present sobre lart de arisme  
 tica per mi Francesch Sanctcliment [(1)] **enla  
 insigna ciutat de Barcelona aquella en/  
 senyant: [(2)] iatsia no ab aquell stilat scriure  
 que entrels doctes es acostumat / mas  
 be satisfet a la feruor ñ aquells:qui de tal  
 art ignorants tenen desig:siẽ adoctriãts  
 tant quant la flaqueza dela mia intelligẽ/  
 sia ma cõsentit. [(3)] **La qual suma fonch re/  
 goneguda per lo reuerent mestre rapita  
 en aquesta e en les altres arts e en sacra  
 theologia meritissimo laureat / e p lo ho/  
 noroble en Jachme Serra olim mestre a  
 la seca de Perpinya.****

# Introducció històrico-metodològica

E si res en orde e modo de dir bo en aquella sera trobat: al donador de gracia deu etern al sia referit. E lo que ab defalliment e no ab aquella al legancia e orde a tal art pertanyent sera posat: sia referit al poch saber que en mi te loch/pregantlos qui mes de mi hi sabrà tals erres amb amor corregesquẽ/sotsme tentme humilment a lur correccio . e per satisfaccio de tants treball los prech: p caritat per mi a deu pregar vullen. ~

# Introducció històrico-metodològica

**Estampada fon la present obra a Barcelona per . Pere Posa preuere en lany Mil quatrecents vuytanta dos.**

# Introducció històrico-metodològica

El context de l'obra és, doncs, el segle xv.

- 1 És el segle en el qual la invasió de Constantinoble pels turcs [1453] marca —segons que han fixats els historiadors— el final de l'Edat Mitjana.
- 2 És el segle de l'aparició de la impremta de caràcters mòbils —sense la qual no disposaríem d'*incunables* i de l'edició de la *Bíblia de Gutemberg* [1455–1456].
- 3 És el segle de les grans travesses transoceàniques [COLON, 1492; MAGALLANES, 1522], amb el que això comporta des del punt de vista de les *assegurances*.

## Caiguda de Constantinoble en mans dels turcs

El turc otomà MEHMET II [30 de març de 1432–3 de maig de 1481], soldà de l'Imperi Otomà entre el 1444 i 1446 i, posteriorment, entre el 1451 i el 1481, entrant a Constantinoble.

Era el 29 de maig de 1453 del calendari gregorià.

La pintura és de FAUSTO ZONARO  
Itàlia, 1854–1929



Així s'acabava definitivament l'imperi Romà d'Orient o imperi Bizantí i, amb ell, finalitza definitivament l'Imperi Romà. Els historiadors han fixat aquesta data com el final de l'edat mitjana i l'inici de la moderna.

## La Bíblia Gutenberg

A JOHANNES ZUM GUTENBERG se'l considera l'**inventor** a Europa dels tipus mòbils de plom fos.

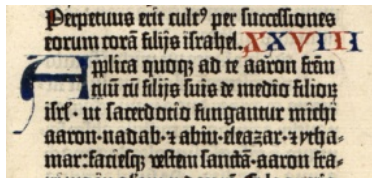
El primer incunable imprès per GUTENBERG va ser la *Bíblia*.

S'estima que aconseguí d'imprimir, il·luminar i enquadernar 180 Bibles de 1282 pàgines cadascuna, a dues columnes de 42 renglons.

### *Bíblia Gutenberg*

Iniciada, el 23 de febrer de 1455

Acabada, 5 anys més tard



Actualment n'existeixen 60, 12 en pergamí i 48 en paper. Alemanya en poseeix, com a mínim, 15, la majoria en les biblioteques d'institucions universitàries.



# JOHANNES GENSFLEISCH ZUR LADEN ZUM GUTENBERG

JOHANNES GENSFLEISCH ZUR LADEN  
ZUM GUTENBERG

Mainz, ~1398

?, 3 de febrer, 1468



# CRISTÒFOR COLOM

Fou un almirall al servei dels REIS CATÒLICS, virrei i governador de les Índies, conegut internacionalment amb el cognom llatinitzat COLUMBUS.

L'expedició salpà del port de Palos de la Frontera el 3 d'agost de 1492, i el 12 d'octubre, arribà a una illa anomenada GUANAHANI, que va rebatejar SAN SALVADOR, a l'arxipèlag de les BAHAMES.

## CRISTÒFOR COLOM

?, ~1451

Valladolid, ? de 1506



Retrat postum, de 1519. SEBASTIANO LUCIANO DEL PIOMBO [Venècia, 1485 –Roma, 21 de juny de 1547]

# Introducció històrico-metodològica

Veiem un exemple de lletra de canvi:

**En el nom de Déu, el 18 de desembre de 1399,  
per aquesta lletra de venciment, pagareu a  
BRUNANCIO DI GUIDO I CIA, al seu venciment,  
CCCCLXXII lliures X sous de Barcelona.**

**Aquestes 472 lliures i 10 sous, que valen  
900 escuts a 10 sous i 6 cèntims per escut,  
m'han estat pagades per RICARD DEGL'ALBERTI  
I CIA.**

**Pagueu-les de bona gana i de forma correcta  
i poseu-les al meu compte.**

**Que Déu us guardi.  
GHUIGLIELMO BARBIERI.  
Salut des de Bruges.**

# Introducció històrico-metodològica

El venciment d'una lletra era el termini habitual del seu cobrament d'un lloc a un altre. Al segle XV, entre Bruges i Barcelona, el venciment habitual era de trenta dies. Una lletra de canvi com la que hem descrit servia per satisfer operacions de canvi de moneda: la moneda era entregada en una ciutat amb la moneda pròpia d'aquella ciutat i, en un altre lloc, hom cobrava un valor equivalent a l'entregat però amb la moneda local. També servia per fer transferències i era una eina adequada per establir crèdits. Es convertí en un dels instruments essencials del comerç italià de finals de l'Edat Mitjana.

Aquest nou sistema econòmic, de préstec i mercat necessitava l'escriptura i també un coneixement clar de les tècniques de càlcul. Això darrer ho proporcionava l'*art de l'algorísmia* o *art de l'algorisme*. Calia dominar l'art de "les lletres i les xifres". Era un ofici que calia aprendre i que, per tant, calia ensenyar.

# Introducció històrico-metodològica

Tot això comportà que, a les darreries de l'Edat Mitjana, els contractes d'assegurances sofrissin un creixement notable alhora que apareixia un sistema nou per dur els comptes: la **comptabilitat per partida doble**. En aquesta tècnica comptable cada operació té **dues entrades**; en una es col·loca allò que es té —és l'haver— i, en l'altre, allò que es deu —és el deute. Cal que el saldo sigui sempre nul.

Una de les originalitats de l'aritmètica de 1494 de LUCA PACIOLI [1445–~1515] no és pas el coneixement de la comptabilitat de *partida doble*, sinó el fet d'introduir una tècnica més que secular en el seu manual, adreçat fonamentalment als comerciants, com una nova eina de càlcul imprescindible i d'elaborar un text complet de síntesi de tot el que era conegut fins aleshores.

# Introducció històrico-metodològica

Feien falta, dins del sistema comercial de l'època, formes de pagament, i això féu que les grans companyies comercials italianes i, més tard, les holandeses, fonamentalment, fossin alhora companyies bancàries dedicades al préstec i a l'intercanvi. Cal tenir present la diversitat de monedes i de llengües a Europa a les darreries de l'Edat Mitjana. Aquest fet féu que entressin en joc les **lletres de canvi** amb l'objectiu de fixar la devolució, en una data, lloc i moneda determinats, d'un préstec fet en un moment anterior, en un altre indret i amb una moneda diferent. Així doncs, les lletres de canvi esdevenen alhora una forma de canvi de moneda, de transferència bancària i de crèdit.

## Introducció històrico-metodològica

La complexitat dels negocis obligava a mantenir una correspondència i comptabilitat importants. A més els capitals que s'arriscaven s'havien d'assegurar. Això féu que apareguessin les companyies d'assegurances que, amb el pas del temps, forçarien l'estudi estadístic aprofundit de certs fenòmens naturals —la vida i la mort, les tempestes i els naufragis dels vaixells, els riscos de robatoris, les pèrdues accidentals i mermes de tota mena en els viatges llargs a què es veien sotmeses les mercaderies i de les possibilitats d'èxit i fracàs en qualsevol mena d'empresa: l'establiment d'un negoci, la realització de viatges transoceànics, l'eventualitat de la victòria o de la derrota a la guerra, etc.

Recordem que el primer tractat pròpiament estadístic fou elaborat per JOHN GRAUNT [1620–1674], l'any 1662. Fou el tractat *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, un text en el qual, de l'anàlisi de les partides de defunció de la ciutat de Londres i la seva rodalia, Graunt aconseguia establir algunes conclusions sobre l'esperança de vida.

## Introducció històrico-metodològica

ANY	CIUTAT	AUTOR	TÍTOL	NACIÓ
1430*	PAMIERS	–	–	FRANÇA
1478	TREVISO	–	–	ITÀLIA
1482	BAMBERG	ULRICO WAGNER	–	ALEMANYA
1482	BARCELONA	FRANCESC SANT-CLIMENT	<i>Summa de la Art de Arismetica</i>	CATALUNYA
1484	VENÈCIA	PIERO BORGHİ	<i>Nobel opera de la arithmetica</i>	ITÀLIA
1484*	LYON	NICOLAS CHUQUET	<i>Triparty en la Science des Nombres</i>	FRANÇA
1485*		JEHAN CERTAIN	<i>Le Kadran aux marchands</i>	FRANÇA
1487	ZARAGOSSA	FRANCESC SANT-CLIMENT?	<i>Compilación de aritmética</i>	ARAGÓ
1489	LEIPZIG	JOHANNES WIDMAN	<i>Algorithmus linealis</i>	ALEMANYA
1490	FLORÈNCIA	FILIPPO CALANDRI	<i>De arithmetica opusculum</i>	ITÀLIA
1492	TURIN	FRANCES PELLIS	<i>Compendion del abaco</i>	FRANÇA
1494	VENÈCIA	LUCA PACIOLI	<i>Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita</i>	ITÀLIA



# Discussió dels antecedents possibles

ANY	CIUTAT	AUTOR	TÍTOL	NACIÓ
825	BAGDAD?	MOHAMMAD AL- <u>H</u> WĀRIZMĪ	<i>Algorismi de numero in- dorum</i>	IRAQ
X	—	GERBERT D'ORLHAC	—	FRANÇA
XIII	CONSTANTINOBLE	MAXIMUS PLANUDES	<i>Aritmètica d'acord amb el mètode indi</i>	—
1202	PISA	LEONARDO DA PISA	<i>Liber abbaci</i>	ITÀLIA
1203	—	ALEXANDRE DE VIL- LEDIEU	<i>Carmen de Algorismo</i>	FRANÇA
XIII	—	JOHN DE SACROBOSCO	<i>Algorismus vulgaris</i>	IRLANDA?

# Discussió dels antecedents possibles

Hi ha una discussió obreta sobre la possibilitat que s'hagin produït dues corrents en l'elaboració d'aritmètiques comercials: la italiana i una de francesooccitana. Tanmateix no explicaria encara l'aparició de les aritmètiques germàniques.

A mi —sense ser-ne un especialista— em sembla que l'índex de continguts és ben poc significatiu. Seria com si volessim acalrir el pare d'un text d'*àlegbr lineal*, a partir de l'índex de continguts. És el mateix arreu, perquè allò que cal transmetre és u.

# Discussió dels antecedents possibles

Caldria tornar a LEONARDO DA PISA que, el 1202 [reeditada, el 128], ens proporciona ja una aritmètica comercial molt important: *Liber abaci*. Fins i tot massa important en el context en què es publica. Recordem que consta de 459 pàgines, quelcom que el converteix en un text molt complet.

No hem d'oblidar que es traslladà al Nort d'Àfrica per tenir cura dels interessos comercials del seu pare BONACCI. I que fou allí on descobrí el nou *àbac*, que incorpora al títol del seu text, en un joc d'enginy i ironia.

# LEONARDO DA PISA, FIBONACCI

Autor del *Liber abaci* [1202, 1228],  
*Practica geometriæ* [1220], *Flos*  
*Leonardi* [1225], i del *Liber*  
*quadratorum* [1225].

Fou capaç de distingir entre la  
*logística* i l'*aritmètica*.

LEONARDO DA PISA, FIBONACCI

Pisa, ? de 1170

Pisa, ? de 1250



# Discussió dels antecedents possibles

Consta de quatre seccions.

A la Secció I, capítols 1 al 7, els capítols són:

- 1 Les nou figures índies, les xifres i la numeració.
- 2 La multiplicació d'enters.
- 3 3. L'addició.
- 4 4. La substracció.
- 5 5. La divisió.
- 6 6. La multiplicació d'enters i de fraccions, la multiplicació de fraccions.
- 7 7. L'addició, substracció i divisió d'enters i de fraccions i la reducció a denominador comú.

**El contingut és clar.**

# Discussió dels antecedents possibles

La Secció 2, capítols 8 al 11, els títols dels quals són,

- 8 Les compres i les vendes.
- 9 Les barates o canvis.
- 10 Les societats.
- 11 El canvi de monedes.

**És la part aplicada i hi dedica un centenar de pàgines.**

Consta de tota mena de problemes relatius a l'*art del comerç*: el canvi de monedes, càlcul d'interessos, aliatges de metalls, barreges de productes d'una mateixa espècie però de preus diferents, transformació d'unitats de mesures dels països de les costes mediterrànies.

# Discussió dels antecedents possibles

A la Secció 3, els capítols 12 i 13 els titula:

- 12 La solució de múltiples problemes.
- 13 La *regla de chatayn* que permet de resoldre problemes diversos.

**És la menys concreta.**

Conté problemes de tota mena. És un calaix de sastre. Hi ha problemes de tipus recreatius i problemes més clàssics com ara els problemes dels dipòsits. És un ventall de problemes senzills provinents de *totes* les cultures precedents: la grega, la xinesa, l'Índia, l'àrab, etc. El darrer de tots és el problema dels conills, un problema que faria famós FIBONACCI dins la matemàtica, perquè condueix a la *successió de Fibonacci*.

# Discussió dels antecedents possibles

La secció darrera, capítols 14 i 15, de títols:

- 14 L'extracció d'arrels quadrades i cúbiques i les operacions amb arrels.
- 15 La geometria i les qüestions d'àlgebra

**És probablement la que posa de manifest, de forma més clara, l'habilitat de FIBONACCI a l'hora d'usar les tècniques algèbriques i la seva utilitat en la resolució de problemes de geometria.**

En aquesta secció es posa de manifest, a més, que LEONARDO coneixia bé l'obra d'EUCLIDES —un fet que retrobem a la *Practica Geometricæ*. Al capítol 14 ofereix l'algorisme d'extracció d'arrels. Segueix la tècnica dels àrabs d'afegir zeros al radicand per tal d'aconseguir “valors aproximats força acurats”.



# Muḥammad al-Hwārizmī

Distingeix entre la logística:  
*Algoritmi de numero Indorum*  
 i l'àlgebra: *Hisab al-jabr w'al-  
 muqabala*.

En el segon resol **algè-  
 bricament** les equacions de  
 segon grau concretes dels  
 tres tipus possibles, com ara

*Quadrats i arrels són iguals a  
 nombres:  $x^2 + 10x = 39$ .*

ABU JA'FAR MUḤAMMAD IBN  
 MŪSÀ AL-HWĀRIZMĪ

Bagdad, ~780

Bagdad, ~850



## LUCA PACIOLI

És l'autor de l'obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* [1494].

És una obra de recopilació tant de les qüestions de logística numèrica indoaràbiga, com de temes comercials, però amb el complement d'àlgebra i de geometria resolta amb àlgebra, que **clou** el segle XV.

### LUCA PACIOLI

Sansepolcro, ? de 1445

Sansepolcro, ? de 1517



És un retrat de Jacopo de'Barbari [Venècia, ~1445–Brussel·les, ~1516] en el qual Pacioli ill·lustra, en una pissarra, el primer teorema dels *Elements* d'Euclides.

# Contingut matemàtic del text de Santcliment

I això és tot. Potser s'esperarien unes paraules a tall de conclusió. Però hi seran. Com s'ha dit al començ, la Biblioteca no es proposava fer l'estudi crític del text o fer-ne l'edició ni, encara menys, ingerir-se en el terreny matemàtic; només pretenia presentar-lo i justificar el perquè de la publicació. Continua, doncs, expedit el camí cap a d'altres investigacions més específiques, més concretes, més aprofundides —i no sols en el camp de l'aritmètica o en el de la tipografia, sinó en tot l'espectre susceptible d'estudi amb què ens obsequia el text presentat i el seu context. Queden força qüestions obertes; força incògnites, força conjectures. El coneixement del text que ara difon en edició facsímil, de lectura entenedora encara que escrit en caràcters gòtics, suggerirà, desitgem, noves vies d'escomesa.

## Notícia breu sobre l'estat de l'àlgebra

En ella, com a cloenda, afirma que la *resolució de la cúbica* —una qüestió en la qual havia treballat amb SCIPIONE DEL FERRO [Bolonya, 6 de febrer de 1465–Bolonya, 5 de novembre de 1526] a BOLONYA en els anys 1, era “una qüestió tan impossible, com la quadratura del cercle”.

Tanmateix el problema seria resolt per DEL FERRO, abans de 1526, i publicat a l'*Ara Magna, sive de reguis algebraicis* [1545] de GIROLAMO CARDANO [Pavia (ducat de Milà), 24 de setembre de 1501–Roma, 21 de setembre de 1576], que en conegué la resolució de NICCOLÒ FONTANA, conegut com TARTAGLIA [Brèscia, ? de 1500–Venècia, 13 de decembre de 1557].

L'obra de Cardano conté també la resolució algebàrica de la quàrtica, deguda al seu deixeble LUDOVICO FERRARI [Bolonya, 2 de febrer de 1522–Bolonya, 5 d'octubre de 1565].

# Contingut matemàtic del text de Santcliment

L'*Arismètica* de SANTCLIMENT és un text estrictament logístic d'aritmètica comercial. No conté ni reflexions aritmètiques (en el senti grec), ni tampoc àlgebra (en el sentit d'AL-HWĀRIZMĪ).

Això, des del punt de vista matemàtic, significa que tot el text es redueix a *equacions de primer grau* (en terminologia algèbrica):  $ax + b = c$ . O bé (en terminologia logística), a la *regle de tres*:

Si **tants** (per exemple, **a**) són a **quants** (per exemple, **b**), a uns **altres tants** (per exemple, **c**), quina quantitat de **quants** (per exemple, **x**) els corresponen?

Simbòlicament,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}. \text{ Trobar el valor de } x.$$

La solució, en termes d'avui, és simple:  $x = \frac{b \times c}{a}$ .

## La doble falsa posició en el text de Santcliment

La tècnica més sofisticada que trobem a l'*Arismètica* de SANTCLIMENT és la *doble falsa posició* —portada a Occident pels matemàtics àrabs, que l'anomenaven *regla de chatayn* i que recull ja el *Liber abaci* de FIBONACCI.

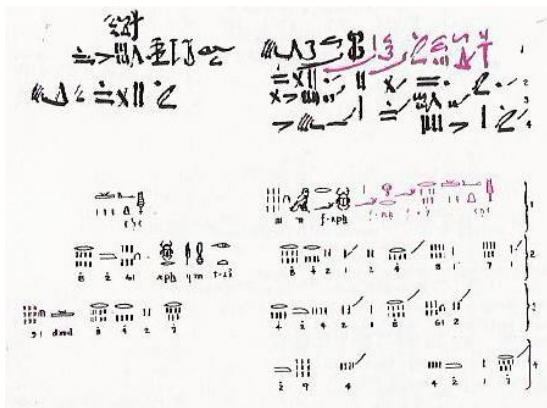
És una tècnica molt antiga que trobem ja en la matemàtica xinesa [300 aC] —com veurem— i a la matemàtica índia [].

## La falsa posició

**La regla de falsa posició.** És molt antiga. Era coneguda ja pels matemàtics egipcis, com podem constatar al *paper Rhind* [~1800 aC].

És una manera de treure denominadors en equacions de la forma

$$\frac{a}{d}x = b \text{ o } \frac{a}{d}x + \frac{c}{d} = b.$$



Problema 24 del paper Rhind

## La falsa posició

En concret, el problema 24 diu: **Enunciat.** *Una quantitat i una setena part és igual a 19. (Quina és la quantitat?).*

**Mètode de resolució.** L'escriba fa la cantidad igual a **7**, que és una forma de terure el denominador.

Així obté el valor  $7 + \frac{1}{7} \times 7 = 8$ .

Ara ha de dividir **19** per **8** i obté la quatidad buscada:

$$\frac{19}{8} \times 7 = 16\frac{1}{8}.$$

El problema anterior correspon a la resolució de l'ecuació

$$x + \frac{1}{7}x = \frac{8}{7}x = 19.$$

Fixem-nos que la falsa posició que hem fet és **per defecte**.

Podríem haver-la fet **per excés**, però, en la falsa posició [simple], això no té cap efecte de càlcul.



## La doble falsa posició

Per veure com funciona —i alhora la seva antiguitat— agafem un problema dels *Nou capítols de la matemàtica xinesa* [300 aC, com a mínim].

En concert, considerem el problema 17 del capítol setè.

**Enunciat.** *El preu d'1 acre de terra bona és de 300 monedes d'or i el preu de 7 acres de terra dolenta és de 500. En total tenim 100 acres que, un cop venuts, proporcionen 10 000 monedes d'or. (Quina quantitat de terra bona i de terra dolenta tenim?).*

## La doble falsa posició

**Mètode de resolució.** Hom suposa que hi ha **20** acres de terra bona i **80**, de terra dolenta. Però aleshores hom ontindria  **$1714\frac{2}{7}$**  peces d'or de més. Però, si suposa que n'hi ha **10** de terra bona i **90** de dolenta, aleshores hi perd  **$571\frac{3}{7}$**  peces d'or.

A partir d'aquí es determina l'excés i el defecte.

La **linealitat** del problema fa que s'hagi de resoldre el que, en termes d'avui, escriuríem  $\frac{20-x}{1714\frac{2}{7}} = \frac{x-10}{571\frac{3}{7}}$ .

Fixem-nos que hi ha una falsa posició d'excés i una de defecte. Podria ser que ambdues fossin per excés o per defecte. Això és una part important del text de SANTCLIMENT [tota la part 14]. Això és important perquè afecta al signe amb el qual fem les operacions.

# Cloenda

La Biblioteca de Catalunya se sent orgullosa de custodiar entre els seus fons aquest incunable. Textos com aquest justifiquen l'interès que la comunitat científica, la comunitat bibliotecària i la societat en general els han dedicat. El Santcliment brinda molta més informació que la continguda a les seves pàgines. La impremta, ja se sap, alhora que escriu en tinta els textos que edita, configura amb la seva producció la memòria del món, almenys part del que el món conserva de la memòria col·lectiva.

JOANA ESCOBEDO  
Barcleona, 2006

## Colors

GreenYellow	Yellow	Goldenrod	Dandelion	Apricot
Peach	Melon	YellowOrange	Orange	BurntOrange
Bittersweet	OrangeRed	Mahogany	Maroon	BrickRed
Red	OrangeRed	RubineRed	WildStrawberry	Salmon
CarnationPink	Magenta	VioletRed	Rhodamine	Mulberry
RedViolet	Fuchsia	Lavender	Thistle	Orchid
DarkOrchid	Purple	Plum	Violet	RoyalPurple
BlueViolet	Periwinkle	CadetBlue	CornflowerBlue	MidnightBlue
NavyBlue	RoyalBlue	Blue	Cerulean	Cyan
ProcessBlue	SkyBlue	Turquoise	TealBlue	Aquamarine
BlueGreen	Emerald	JungleGreen	SeaGreen	Green
ForestGreen	PineGreen	LimeGreen	YellowGreen	SpringGreen
OliveGreen	RawSienna	Sepia	Brown	Tan
Gray	Black	White		