

Determinación del radio de la Tierra y de los radios y distancias en el sistema Tierra-Luna-Sol

Rosa M. Ros

Universitat Politècnica de Catalunya

Aristarco (310 - 230 a.C.) dedujo algunas proporciones entre las distancias y los radios del sistema Tierra-Luna-Sol. Calculó el radio del Sol y de la Luna, la distancia desde la Tierra al Sol y la distancia de la Tierra a la Luna en relación al radio de la Tierra. Algunos años después Eratóstenes (280-192 a.C.) determinó el radio de nuestro planeta y fue posible calcular todas las distancias y radios del sistema Tierra-Luna-Sol.

La propuesta de esta actividad consiste en repetir con estudiantes ambos experimentos. La idea es repetir el proceso matemático diseñado por Eratóstenes y Aristarco a la vez que, en la medida de lo posible, repetir las observaciones.

El experimento de Eratóstenes, de nuevo

Para repetir el experimento de Eratóstenes basta usar dos estacas introducidas perpendicularmente en el suelo, en dos ciudades de la superficie terrestre sobre el mismo meridiano. Como las estacas deben estar apuntando hacia el centro de la Tierra, normalmente es mejor usar una plomada donde se marca un punto del hilo para poder medir las longitudes. Se debe medir la longitud de la plomada desde el suelo hasta esa marca, y la longitud de su sombra desde la base de la plomada hasta la sombra de la marca.

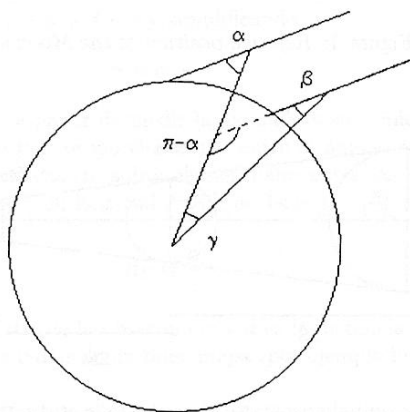


Fig. 1: Situación de plomadas y ángulos en el experimento de Eratóstenes

Como el Sol esta muy alejado de la Tierra, se considera que los rayos solares son paralelos. Esos rayos solares producen dos sombras, una para cada plomada. Se miden las longitudes de la plomada y su sombra y usando la definición de tangente (o dibujado un triangulo semejante), se obtienen los ángulos α y β (Fig. 1). El ángulo central γ puede calcularse imponiendo que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a π radianes. Entonces $\pi = \pi - \alpha + \beta + \gamma$ y simplificando

$$\gamma = \alpha - \beta$$

donde α y β se han obtenido a partir de medir la plomada y su sombra.

Finalmente estableciendo una proporcionalidad entre el ángulo γ , la longitud de su arco d (determinado por la distancia sobre el meridiano entre las dos ciudades), y 2π radianes del círculo meridiano y su longitud $2\pi R_E$, es decir,

$$d/\gamma = (2\pi R_E)/(2\pi)$$

simplificando se deduce que:

$$R_E = d/\gamma$$

donde γ se ha obtenido a partir de la observación y d es la distancia en km entre ambas ciudades. Se puede hallar d a partir de un buen mapa (por ejemplo los mapas del ejército nos permiten conocerla).

También hay que mencionar que el objetivo de esta actividad no es la precisión de los resultados. Solo se desea que los estudiantes descubran que pensando y usando todas las posibilidades que puedan imaginar son capaces de obtener resultados sorprendentes.

Tamaños y Distancias en el sistema Tierra-Luna-Sol

El experimento de Aristarco de Nuevo

Relación entre las distancias Tierra-Luna y Tierra-Sol

Aristarco determinó que el ángulo bajo el que se observa desde la Tierra la distancia Sol-Luna cuando ésta está en el instante del cuarto era de 87° (Fig. 2).

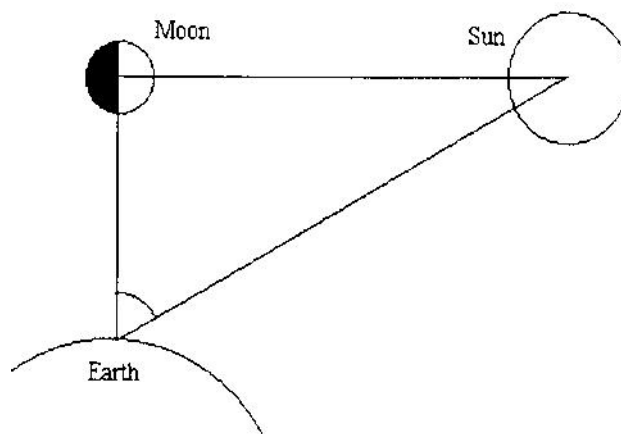


Fig. 2 Posición relativa de la Luna en el cuarto

En la actualidad se sabe que cometió un error, posiblemente debido a que le resultó muy difícil determinar el preciso instante del cuarto de fase. De hecho este ángulo

es de $89^{\circ} 51'$, pero el proceso usado por Aristarco es perfectamente correcto. En la figura 15, si se usa la definición de seno, se puede deducir que,

$$\sin 9' = ES/EM$$

donde ES es la distancia desde la Tierra al Sol, y EM es la distancia de la Tierra a la Luna. Entonces aproximadamente,

$$ES = 400 EM$$

(aunque Aristarco dedujo $ES = 19 EM$).

Relación entre el radio de la Luna y del Sol

La relación entre el diámetro de la Luna y del Sol debe ser similar a la fórmula previamente obtenida, porque desde la Tierra se observan ambos diámetros iguales a 0.5° . Por lo tanto ambos radios verifican

$$R_S = 400 R_M$$

Relación entre la distancia de la Tierra a la Luna y el radio lunar o entre la distancia de la Tierra al Sol y el radio solar

Dado que el diámetro observado de la Luna es de 0.5° , con 720 veces este diámetro es posible recubrir la trayectoria circular de la Luna en torno a la Tierra. La longitud de este recorrido es 2π veces la distancia Tierra-Luna, es decir $2 R_M \cdot 720 = 2 \pi EM$, despejando,

$$EM = (720 R_M)/\pi$$

y por un razonamiento similar,

$$ES = (720 R_S)/\pi$$

Esta relación es entre las distancias a la Tierra, el radio lunar, el radio solar y el radio Terrestre

Durante un eclipse de Luna, Aristarco observó que el tiempo necesario para que la Luna cruce el cono de sombra terrestre era el doble del tiempo necesario para que la superficie de la Luna fuera cubierta (Fig. 3). Por lo tanto dedujo que la sombra del diámetro de la Tierra era doble que el diámetro de la Luna, esto es, la relación de ambos diámetros o radios era de 2:1. Realmente se sabe que este valor es de 2.6:1.

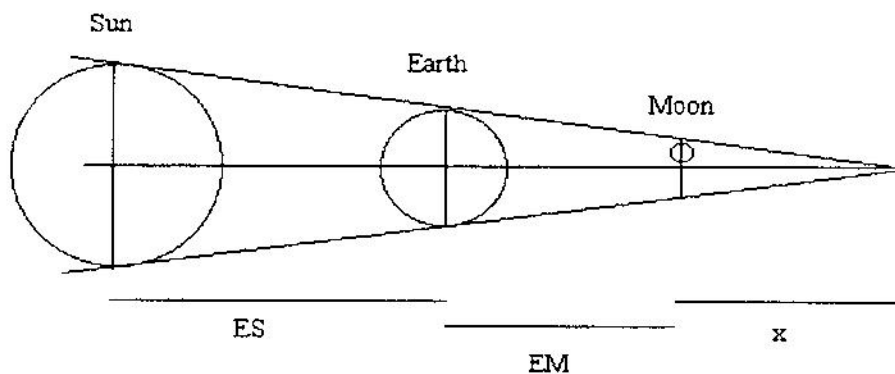


Fig. 3: Cono de sombra y posiciones relativas del sistema Tierra-Luna-Sol.

Entonces, (Fig. 3) se deduce la siguiente relación

$$x / (2.6 R_M) = (x+EM) / R_E = (x+EM+ES) / R_S$$

donde x es una variable auxiliar.

Introduciendo en esta expresión las relaciones $ES = 400 EM$ y $R_S = 400 R_M$, se puede eliminar x y simplificando se obtiene,

$$R_M = (401/1440 R_E)$$

que permite expresar todas las dimensiones mencionadas con anterioridad en función del radio de la Tierra, así

$$R_S = (2005 / 18) R_E$$

$$ES = (80200 / \pi) R_E$$

$$EM = (401 / (2\pi)) R_E$$

Donde sólo hay que sustituir el radio de nuestro planeta para obtener todas las distancias y radios del sistema Tierra-Luna-Sol.

Medidas con los estudiantes

Es una buena idea repetir las medidas realizadas por Aristarco con los estudiantes. En particular, primero hay que calcular el ángulo entre el Sol y la Luna en el cuarto. Para realizar esta medida sólo es necesario disponer de un teodolito y saber el exacto instante del cuarto. Así se verificará si este ángulo mide 87° ó $89^\circ 51'$ (es esta una medida realmente difícil de obtener).

En segundo lugar, durante un eclipse de Luna, usando un cronómetro, es posible calcular la relación entre los tiempos siguientes: “el primer y el último contacto de la Luna con el cono de sombra terrestre”, es decir, medir el diámetro del cono de sombra

de la Tierra (Fig. 4) y “el tiempo necesario en cubrir la superficie lunar”, esto es la medida del diámetro de la Luna (Fig. 5). Finalmente es posible verificar si la relación entre ambos tiempos es 2:1 ó es de 2.6:1.

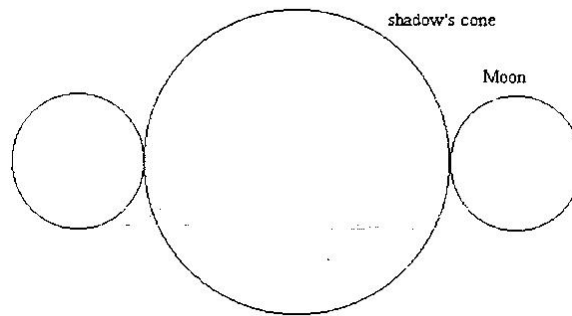


Fig. 4: Midiendo el cono de sombra

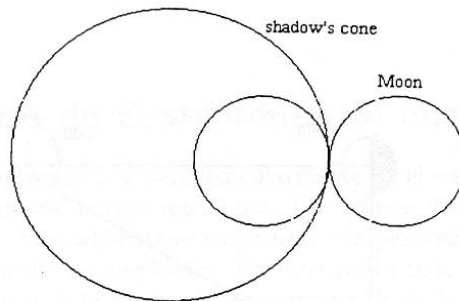


Fig.5: Midiendo el diámetro de la Luna

El objetivo más importante de esta actividad, no es el resultado obtenido para cada radio o distancia. Lo más importante es hacer notar a los estudiantes que, si ellos usan sus conocimientos e inteligencia, pueden obtener interesantes resultados disponiendo de pocos recursos. En este caso el ingenio de Aristarco fue muy importante para conseguir obtener alguna idea acerca del tamaño del sistema Tierra-Luna-Sol.

Bibliografía

- Ros, R.M., Viñuales, E., Aristarchos' Proportions, *Proceedings of 3rd EAAE International Summer School*, p.55- 64, 1999.
- Ros, R.M., Viñuales, E., Aristarco y las distancias al Sol y a la Luna, *Astronomía, Astrofotografía y Astronáutica*, 63, p.21, 1993.
- Ros, R.M., Viñuales, E., El mundo a través de los astrónomos alejandrinos, *Astronomía, Astrofotografía y Astronáutica*, 69, p.12-1, 1994.