L'equació de 2n grau en el tractat *Kitāb al-Mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* (ca. 813)

Massa-Esteve, M. Rosa[1], **Puig-Pla, Carles**[2]

[1] Dept.de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, m.rosa.massa@upc.edu
[2] Dept. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, carles.puig@upc.edu

Resum de la comunicació

L'activitat que presentem està dissenyada a partir de la justificació geomètrica de la resolució de l'equació de segon grau en el tractat *Kitāb al-Mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala,* i emfasitza el raonament visual, alhora que combina l'àlgebra amb la geometria.
L'objectiu d'aquesta activitat és que els alumnes aprenguin conceptes i processos matemàtics a través de la seva història.

L'objectiu d'aquesta comunicació és analitzar alguns aspectes rellevants del desenvolupament històric de l'àlgebra prenent com a fil conductor diferents maneres de resoldre l'equació de segon grau al llarg de la història que poden ser emprades a l'aula per ajudar l'alumne a entendre millor els procediments algebraics. Aquesta activitat es va dissenyar dins de l'àmbit de treball del grup d'història de les matemàtiques d'ABEAM.

PARAULES CLAU: *Kitāb al-Mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala,* àlgebra, geometria

1. Introducció[1]

La història de la matemàtica pot contribuir a millorar el seu ensenyament de dues maneres: proporcionant als alumnes una visió diferent de la matemàtica i facilitant-ne el seu aprenentatge (Jahnke i altres, 1996; Massa-Esteve, 2003).

---

[1] Aquesta investigació compta amb el suport del projecte HAR2013-44643-R i de l'ABEAM (Associació de Barcelona per a l'Ensenyament i Aprenentatge de les Matemàtiques).

L'objectiu de les activitats que aquí es presenten és que els alumnes aprenguin conceptes i processos matemàtics a través de la seva història. Les activitats estan dissenyades a partir de textos matemàtics originals o traduccions reconegudes d'aquests textos. En alguns casos els alumnes han de trobar resposta a algun problema clàssic i en d'altres han de reproduir algunes demostracions de manera convenientment pautada. De fet, en el currículum de 2015 (Decret 187/2015)[2], el que eren contextos en el currículum de 2007 han passat a formar part dels blocs de continguts donant-los més rellevància, de manera que es reconeix la importància de la història de les matemàtiques per a l'ensenyament de les matemàtiques.

Part del professorat que imparteix matemàtiques pot no haver tingut l'oportunitat de formar-se en història de les matemàtiques. Aquesta comunicació pot aportar idees per treballar els continguts històrics del currículum de matemàtiques d'una manera competencial i interdisciplinària.

En aquest treball, es mostren connexions entre diferents parts de les matemàtiques com la geometria i l'àlgebra, que contribueixen a l'assoliment de la competència de l'àmbit matemàtic: *usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar*, associada a la dimensió *connexions.*

De fet, l'estudi dels polinomis i de les equacions associades a ells, ha evolucionat molt al llarg del temps, i el seu recorregut històric és molt instructiu i suggeridor. L'objectiu d'aquesta comunicació és analitzar alguns aspectes rellevants del desenvolupament històric de l'àlgebra, que poden ser emprats a l'aula per ajudar l'alumne a entendre millor els procediments algebraics. Es pren com a fil conductor les diferents maneres de justificar la solució de l'equació de segon grau al llarg de la història i es focalitza en la resolució d'equacions utilitzant el mètode d' al-Khwārizmī de completar quadrats, que fa èmfasi en el raonament visual, alhora que combina l'àlgebra amb la geometria.

2. Context històric: les regles algebraiques als àrabs

A fi de contextualitzar les construccions geomètriques dels àrabs presentarem algunes dades de les primeres relacions entre l'àlgebra i la geometria (Parshall, 1988; Bashmakova & Smirnova, 2000 i Massa-Esteve, 2005). Encara que l'algorisme de resolució de les equacions de segon grau ja es pot deduir a partir dels problemes resolts a les taules babilòniques, en elles no apareix cap construcció geomètrica de la solució. A la matemàtica "babilònica" (ca.1500 aC), que va ser transmesa per escribes es donaven una sèrie d'instruccions per resoldre els problemes (sense cap explicació), alguns dels quals avui dia solucionaríem amb una equació de segon grau. Cal assenyalar que a les taules babilòniques existeixen instruccions numerades amb càlculs numèrics, sense lletres i sense signes.

Es pot interpretar que la matemàtica grega també fa la seva aportació a la justificació geomètrica de les equacions algebraiques. Així, en el llibre II dels *Elements* d'Euclides (ca. 300 aC), obra que recull els coneixements matemàtics de diferents escoles gregues i una de les que més influència cultural ha tingut al llarg de la història de la ciència, es fan evidents construccions geomètriques que més tard els àrabs, i alguns autors del Renaixement,

[2] DECRET 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria.

empraran per justificar l'algorisme de la solució de l'equació de segon grau. A tall d'exemple, a la proposició 6 del llibre II es pot llegir:

> "Si es divideix en dues parts iguals una línia recta [$b/2$] i se li afegeix, en línia recta, una altra recta [x]; el rectangle comprés per la recta sencera amb la recta afegida i la recta afegida [$(x+b).x$] juntament amb el quadrat sobre la meitat [$(b/2)^2$] és igual al quadrat sobre la recta composta per la meitat i la recta afegida [$(x+b/2)^2$].[3]

En aquesta proposició es demostra la igualtat que s'expressaria, en llenguatge actual:

$$[(x+b).x] + [(b/2)^2] = [(x+b/2)^2].$$

La construcció geomètrica que acompanya aquestes proposicions euclidianes és un quadrat de costat "x" completat amb dos rectangles de costats "x" i "$b/2$" i un quadrat de costat "$b/2$" per obtenir un quadrat de costat "($x + b/2$)". Cal remarcar que en el text d'Euclides no hi ha símbols, ni nombres, ni expressions algebraiques, només figures i relacions entre elles i els seus costats, és a dir, només hi ha geometria: segments que s'afegeixen i que quan es multipliquen produeixen figures geomètriques.

Els àrabs han jugat un paper fonamental en el desenvolupament de l'àlgebra, així com en el d'altres branques de la ciència. Cal recordar que mentre l'imperi romà va desaparèixer a Occident i amb ell es va produir la decadència de la ciència grega, l'imperi a Orient es va mantenir. El profeta Mahoma nascut l'any 580, va formar un estat mahometà a la Meca l'any 622, que es va anar expandint fins al segle XII (Figura 1).

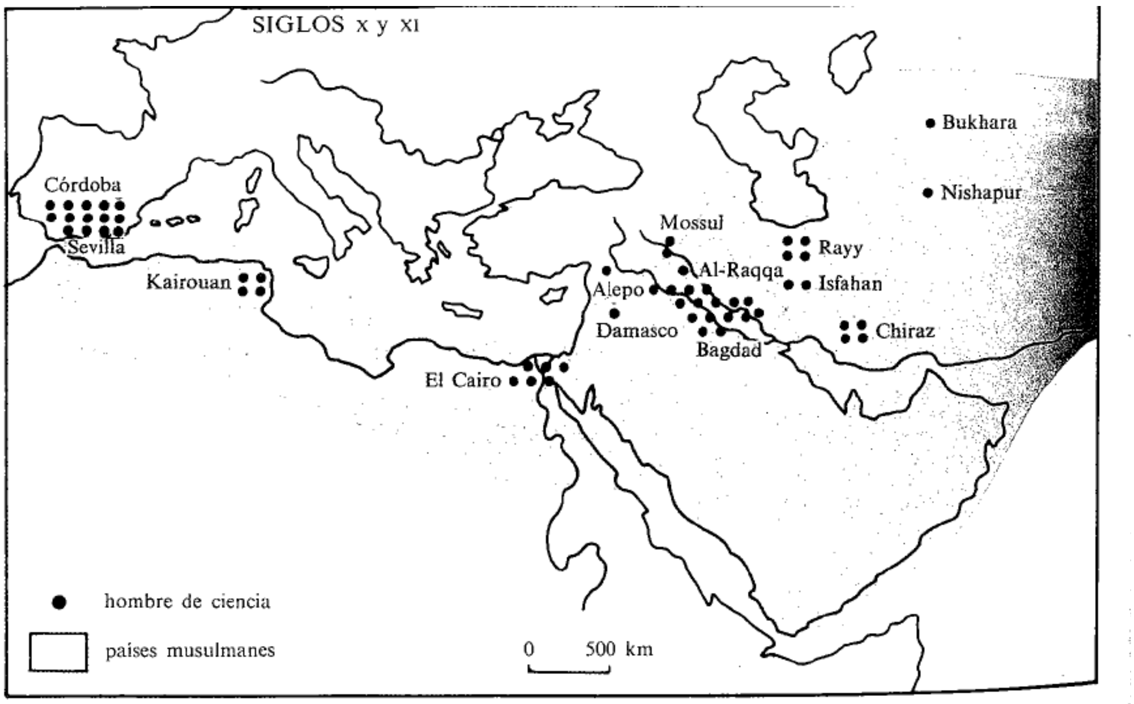

Figura 1. Els principals focus de la cultura àrab dels s. X i XI (Benoit & Micheau, 1991, p. 182)

---

[3] "If a straight line be bisected and a straight line be added to it in a straight line, the rectangle contained by the whole with the added straight line and the added straight line together with the square on the half is equal to the square on the straight line made up of the half and the added straight line." (Euclid, 1956, p. 385).

Els àrabs, doncs, van recollir l'abstracció del saber grec i el pragmatisme i càlcul del saber indi, millorant i transformant aquests coneixements assimilats, i creant-ne de nous a partir dels recursos de la seva pròpia civilització. Bagdad va ser el gran centre científic on van arribar i es van traduir les grans obres gregues, com ara els *Elements* d'Euclides o l'*Almagest* de Ptolemeu, i on s'hi van elaborar noves taules astronòmiques. Després de Bagdad, van anar apareixent altres focus de cultura: El Caire, Còrdova, Samarcanda, Isfahan... Els àrabs van fer importants contribucions en física, astronomia d'observació, alquímia, medicina, trigonometria, geometria i àlgebra (Benoit & Micheau, 1991, p. 174-201).

L'ús conjunt de raonaments geomètrics i algebraics es pot trobar al tractat de Mohamed Ben-Musa al-Khwārizmī, matemàtic, astrònom i membre de la Casa de la Saviesa de Bagdad, que va morir el 850 dC. i és considerat com el creador de les regles de l'àlgebra. La seva obra *Kitāb al-Mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* (ca. 813) va ser traduïda al llatí per Roberto de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual d'àlgebra (Rashed, 1997 i Youschkevitch, 1976). Al-Khwārizmī al començament de l'obra *Hisâb al-jabr wal-muqqabala* explicava les seves intencions en escriure aquest tractat:

> "El meu propòsit és compondre una obra breu sobre el càlcul per les regles de compactació i reducció, limitant-nos al que és a la vegada més fàcil i més útil en l'aritmètica, i que els homes necessiten constantment en els casos d'herències, llegats, particions, plets així com en el comerç i en totes les relacions dels uns amb els altres, o bé on es necessiten mesures de terres, excavacions de canals, càlculs geomètrics i altres assumptes de molts diversos tipus."[4]

L'obra d' al-Khwārizmī, constava d'una part teòrica amb el mètode per resoldre equacions amb coeficients positius (que classificava en sis tipus, fins a segon grau) i una part pràctica que contenia problemes il·lustratius de cadascun dels tipus: problemes de nombres, de comerç, de dots, del blat i la civada, dels exèrcits i dels correus. Totes les altres àlgebres àrabs, basades en aquesta, van conservar aquesta estructura.

Les seves regles "*al-jabr wa'l-muqābala*" eren les emprades per solucionar les equacions. La primera, "al-jabr", que traduïm per chéber o restauració, consistia en eliminar totes les quantitats que tinguessin signe negatiu. La paraula "wa" significa "i" i la paraula "al-muqabala" o reducció, significava agrupar els termes de la mateixa espècie. Les regles tot i que eren elementals no es centraven en un problema concret i tant les utilitzaven en problemes aritmètics, com en geomètrics, com en problemes de la vida quotidiana.

Les equacions les estructuraven en sis tipus (fins a segon grau), el llenguatge emprat era retòric, sense utilització de símbols i amb alguna justificació geomètrica de les solucions trobades com veurem a l'apartat següent. Així, després d'haver explicitat que existeixen tres classes de nombres: arrels, quadrats i nombres simples, al-Khwārizmī definia els sis tipus d'igualtat, sense escriure cap símbol, a través de la igualtat de les tres classes: "quadrats

[4] "(My intention is) to compose a short work on Calculating by (the rules of) Completion and Reduction, confining it to what is easiest and most useful in arithmetic, such as men constantly require in cases of inheritance, legacies, partition, law-suits, and trade, and in all their dealings with one another, or where the measuring of lands, the digging of canals, geometrical computation, and other objects of various sorts and kinds are concerned." (Al-kwarizmi,1986, p. 3-4).

igual a arrels" [en notació actual, $ax^2 = bx$]; "quadrats igual a nombres" [$ax^2= c$]; "arrels igual a nombres" [$bx = c$]; "quadrats i arrels igual a nombres" [$ax^2 + bx = c$]; "Quadrats i nombres igual a arrels" [$ax^2 + c = bx$] i "arrels i nombres igual a quadrats" [$bx + c = ax^2$]. A la part teòrica de l'obra, primer donava, amb llenguatge retòric l'algorisme de resolució de cada un dels tipus mitjançant un exemple numèric i, després, en la part pràctica dels problemes, cada vegada que en un problema plantejava una equació donava el tipus i la solució, sense fer-ne les operacions. Aquesta manera de procedir ens mostra com els àrabs establien i treballaven amb una classificació de les equacions de segon grau.

3. Les justificacions geomètriques de la solució de l'equació de segon grau

Vegem tot seguit un exemple de justificació de la solució d'una equació de segon grau completa. Al-Khwārizmī quan explicava la solució del tipus "quadrats i arrels igual a nombres" ho feia amb un exemple numèric "un quadrat i deu arrels del mateix és igual a trenta-nou unitats" [$x^2 + 10x = 39$],

> "L'operació per això és que dividiu per la meitat el nombre d'arrels, que en la present instància dóna 5 [$b/2$]. Aquest multipliqueu-lo per ell mateix; el producte és 25 [$(b/2)^2$]. El que resulti afegiu-lo a 39 [c]; la suma és 64 [$(b/2)^2 + c$]. Ara pren l'arrel d'aquest, que és 8, [$(b/2)^2 + c]^{1/2}$, i resta-li la meitat del nombre d'arrels, que és 5; la resta és 3 [$-(b/2) + ((b/2)^2 + c)^{1/2}$]. Aquesta és l'arrel del quadrat i el quadrat mateix és 9.[5]

Al-Khwārizmī en la seva obra també presentava construccions geomètriques per justificar la solució de l'equació de segon grau. El llenguatge emprat per explicar les figures era retòric, sense utilització de símbols i posant nombres a l'explicació. L'equació de segon grau es plantejava com un rectangle igual a un quadrat, ès a dir, $x(x+b) = c$, essent c l'àrea del quadrat. Feia dues construccions geomètriques per justificar les solucions trobades, la primera l'explicava en aquests termes,

> "Considerem el quadrat AB que representa el quadrat. Hem d'afegir-hi les deu arrels [es refereix a la x] del mateix [quadrat]. Per això, dividim per la meitat el deu, que dóna cinc, i construïm dos "quadrangles" sobre els dos costats del quadrat AB, concretament, G i D, essent cinc la longitud de cadascun, que és la meitat de deu arrels, mentre que l'amplada de cadascun és igual al costat del quadrat AB. Aleshores queda un quadrat oposat en l'extrem del quadrat AB. És igual a cinc multiplicat per cinc: aquest cinc és la meitat del nombre d'arrels que hem afegit a dos costats del primer quadrat."[6]

---

[5] "The solution is this: you halve the number of the roots, which in the present instance yields five. This you multiply by itself; the product is twenty-five. Add this to thirty-nine; the sum is sixty-four. Now take the root of this, which is eight, and subtract from it half the number of the roots, which is five; the remainder is three. This is the root of the square which you sought for; the square itself is nine". (Al-khwarizmi, 1986, p. 8).

[6] "We proceed from the quadrate AB, which represents the square. It is our next business to add to it the ten roots of the same. We halve for this purpose the ten, so that it becomes five, and construct two quadrangles on two sides of the quadrate AB, namely, G and D, the length of each of them being five, as the moiety of the ten roots, whilst the breadth of each is equal to a side of the quadrate AB. Then a quadrate remains opposite the corner of the quadrate AB. This is equal to five multiplied by five: this five bieng half of the number of roots which we have added to each of the two sides of the first quadrate." (Al-khwarizmi, 1986, p. 15)

"Així sabem que el primer quadrat, que és el quadrat [aquí es refereix al quadrat com a potència], i els dos quadrangles sobre els seus costats, que són deu arrels, fan entre tots, trenta-nou. Per completar el quadrat gran, necessitem només un quadrat de cinc per cinc, o sigui, vint-i-cinc. Ho afegim a trenta-nou per completar el quadrat gran SH. La suma és seixanta-quatre. Fem l'arrel quadrada, vuit, que és un dels costats del quadrat gran. Restant-li la mateixa quantitat que hem afegit, o sigui, cinc, obtenim tres. Aquest és el costat del quadrat AB, que representa el quadrat [com a potència]; és l'arrel d'aquest quadrat, i el quadrat és nou. Aquesta és la figura."[7] (vegeu figura 2)

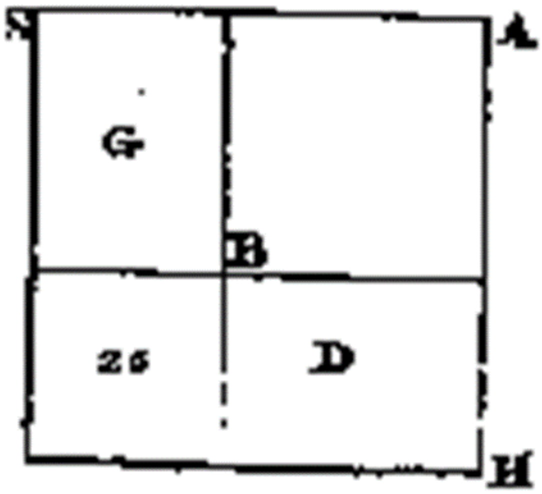

Figura 2. Il·lustració de la primera justificació geomètrica (Al-khwarizmi, 1986, p. 16).

La segona justificació geomètrica que feien els àrabs de les solucions de l'equació de segon grau es basava en construir un quadrat de costat "*x*" i completar-lo amb quatre rectangles de mides "*x*" i "*b/4*" i quatre quadrats de costat "*b/4*", per obtenir un quadrat de costat "*x + b/2*", com es pot comprovar en la figura següent (Figura 3):

[7] "Thus we know that the first quadrate, which is the square, and the two quadrangles on its sides, which aret he ten roots, make together thirty-nine. In order to complete the great quadrate, there wants only a square of five multiplied by five, or twenty-five. This we add to thirty-nine, in order to complete the great square SH. The sum is sixty-four. We extract its root, eight, which is one of the sides of the great quadrangle. By subtracting from this the same quantity which we have before added, namely five, we obtain three as the remainder. This is the side of the quadrangle AB, which represents the square; it is the root of this square, and the square itself is nine. This is the figure." (Al-khwarizmi, 1986, p. 15-16)

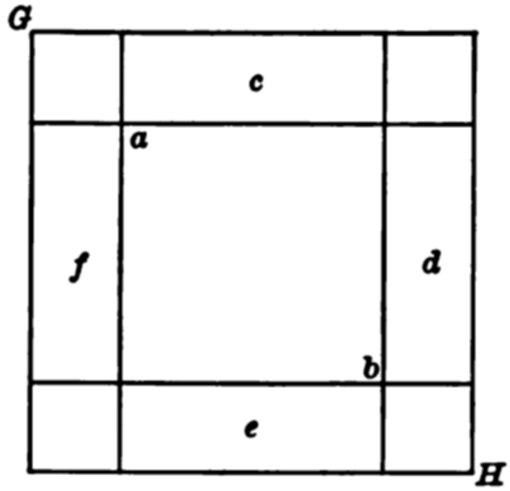

Figura 3. Il·lustració de la segona justificació geomètrica (Al-khwarizmi, 1986, p. 15).

Aquestes construccions geomètriques amb rectangles i quadrats servien per justificar amb la geometria, ciència per excel·lència en aquella època, la regla de resolució de l’equació de segon grau.

Qui va difondre més tard en el món occidental tots aquests coneixements va ser Leonardo de Pisa (1180-1250), fill d’un cònsol, anomenat Bonacci, que és conegut amb el nom de Fibonacci. A la seva obra *Liber abaci* (1202) va reflectir els problemes que va aprendre a calcular a les àlgebres àrabs i va presentar construccions geomètriques similars.

4. Activitats a l’aula

Les activitats amb els alumnes es poden centrar en el desenvolupament de la ciència en l’Islam especificant les contribucions aràbigues, així com també es pot situar al-Khwārizmī en el temps i en el context polític i social. Tanmateix, el més important és emprar aquestes justificacions geomètriques dels àrabs per considerar les equacions de segon grau, que són eines totalment algebraiques, des d’una altra perspectiva. Es pot també emprar algun text escrit en espanyol, com ara *El Compendio de Álgebra* (1343) d’Abenbéder (autor sevillà). Aquesta obra es troba en el manuscrit 936 de la Biblioteca de l’Escorial. Té 46 folis en àrab de tipus espanyol, granadí, i conté també les mateixes justificacions geomètriques (Abenbéder, 1916).

L’activitat consisteix en que els alumnes responguin les qüestions següents i resolguin els exercicis (Figura 4):

- Quan i on va viure al-Khwārizmī?
- A què es dedicava?
- Quines obres va escriure que van transcendir i van marcar camí en la història de les matemàtiques?
- A quines preguntes volia respondre amb la seva obra?
- Quines regles feien servir les àlgebres àrabs?
- Assenyala la relació entre la resolució retòrica àrab de l’equació de segon grau i l’algorisme actual de resolució.

- Tria algun problema del text d' al-Khwārizmī, troba la solució i raona el procediment.
- Reprodueix la justificació geomètrica de la solució de l'equació $x^2 + 6x = 40$ amb el procediment emprat en les àlgebres àrabs.
- Reflexiona: Pots emprar aquesta construcció per a qualsevol equació?
- Reflexiona: Què passa amb les solucions negatives?
- Reflexiona: Quina relació hi ha entre l'àlgebra i la geometria en aquest exemple?

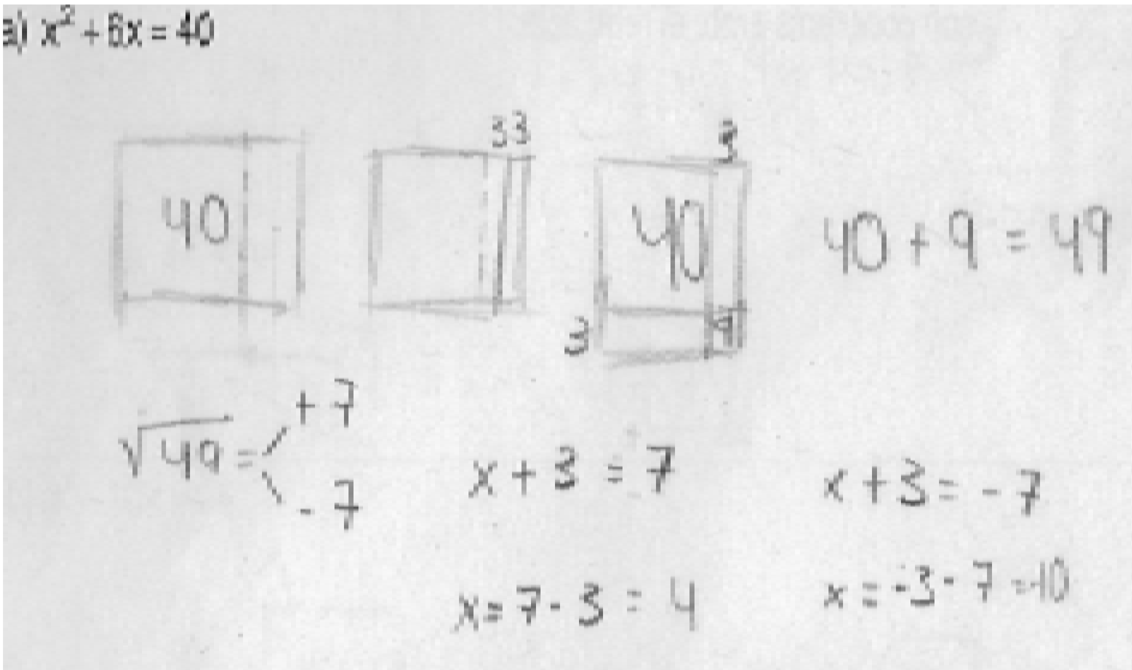

Figura 4. Producció d'una alumna.

5. Metodologia

L'apartat "context històric" pot ajudar al professorat i a l'alumne a situar l'activitat matemàtica tant en la història de la matemàtica, com en la matemàtica.

En introduir un personatge i la seva època caldrà presentar-lo en el seu context, envoltat dels objectius i preocupacions de l'època i dels problemes que pretenia resoldre. Per començar a parlar d'una època i d'un personatge és molt convenient disposar d'un mapa a l'aula per tal de situar-lo geogràficament i històricament.

La metodologia emprada en la realització d'aquestes activitats té l'alumne com a centre de l'aprenentatge, ja que el professor introdueix l'activitat, i l'alumne, de manera més o menys guiada, ha de reflexionar i donar resposta a la pregunta que s'hi formula. Cal respectar el ritme de l'alumnat i buscar l'equilibri entre deixar pensar i respondre preguntes.

El treball en grup fet de manera responsable i seguit d'una posta en comú, pot ajudar a treure més profit de l'activitat ja que modula els diferents ritmes dels alumnes i els ensenya a aprendre en col·laboració. En aquest sentit aquesta activitat pot donar idees sobre com es pot contribuir a l'assoliment de la competència matemàtica: *emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques,* associada a la dimensió *comunicació i representació.*

En aquesta activitat els alumnes, en intentar representar i solucionar les equacions de segon grau emprant la geometria a la manera dels àrabs, reflexionen sobre les relacions entre dues parts de la matemàtica que a vegades es complementen per fer avançar el coneixement: l'àlgebra i la geometria.

6. Reflexions finals

La història de les matemàtiques és una font de recursos inesgotable per dissenyar activitats d'aprenentatge. En el disseny d'activitats es potencien les connexions i es posa de manifest què havien après realment sobre la resolució d'equacions.

En triar les fonts de manera acurada, la realització d'activitats d'aquest tipus pot aportar a l'alumnat una visió holística de les matemàtiques que està en la línia competencial del nou decret de currículum. Les activitats s'introdueixen normalment a partir de preguntes i es relacionen amb el context, inquietuds i necessitats de l'època corresponent.

El fet que en algunes activitats es relacionin continguts de diferents blocs, com en aquest treball són la geometria i l'àlgebra dóna coherència a aquests continguts que no es veuen com a parts aïllades de la matèria sinó connectades entre elles.

Pel que fa a la contribució d'aquesta activitat concreta en el desenvolupament de l'intel·lecte del alumnat, es requereix alguna reflexió més. La geometria, que estudia les figures del pla i de l'espai, té un gran valor visual estètic i la bellesa i l'elegància de les seves construccions la converteixen en un dels recursos més apropiats per desenvolupar la capacitat de raonament de l'alumnat, tant pel que fa a la visualització intuïtiva com en els processos deductius de les seves demostracions. Tanmateix, els raonaments geomètrics adquireixen el seu excepcional potencial en relacionar l'àlgebra amb la geometria o sigui en establir connexions entre fórmules i figures, entre càlculs algebraics simbòlics i operacions geomètriques i construccions. Aquesta identificació permet al seu torn presentar als ulls de l'alumne de forma més propera i més entenedora les expressions algebraiques de l'equació de segon grau i les fórmules de resolució. Aquesta activitat, doncs, pot ajudar a desenvolupar el pensament analític i sintètic de l'alumne i en general a millorar la seva formació científica.

7. Bibliografia

Abenbéder, *Compendio de àlgebra de Abenbéder,* ed. i traducció de Sánchez Pérez, Madrid: Junta para la Ampliación de estudiós e Investigaciones Científicas,1916.

Al-khwarizmi, *The Algebra,* Rosen (ed. i trad.), Londres: Olms, 1986. ISBN: 3-487-07722-1.

Barshmakova, Isabella; Smirnova, Galina. *The Beginnings & Evolution of Algebra.* United States of America: The Mathematical Association of America, 2000. ISBN: 0-83385-300-0.

Benoit, Paul; Micheau, Françoise. " El intermediario árabe?", dins *Historia de las ciencias*, M. Serres (ed), Madrid: Cátedra, 1991, p. 175-201. ISBN: 84-376-0988-7.

Euclid. *The thirteen Books of Euclid's Elements.* Nova York: Dover, vol.1,1956. ISBN: 486-60088-2.

Jahnke, Hans Niel; Knoche, Norbert; Otte, Michael (eds.). *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1996. ISBN: 3-525-40318-6.

Massa-Esteve, M. Rosa. "Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica". *Biaix,* 2003, 21, p. 4-9.

Massa-Esteve, M. Rosa. "Les equacions de segon grau al llarg de la història". *Biaix,* 2005, 24, p. 4-15.

Massa-Esteve, M. Rosa; Guevara-Casanova, Iolanda; Romero Vallhonesta, Fàtima; Puig-Pla, Carles. Understanding mathematics using original sources. Criteria and conditions. A: Barbin *et al.* (ed.) *History and Epistemology in Mathematics Education*, Wien: HPM/ Verlag Holzhausen GmbH, 2011, p. 415-427. ISBN: 978-3-85493-208-6.

Massa-Esteve, M. Rosa. "Álgebra y geometria en el aula: la construcción geomètrica de la solución de la ecuación de segundo grado". A: *Enseñanza e Historia de las Ciencias y de las Técnicas. Orientación, Metodologías y Perspectivas.* Blanco, M. (ed.). Barcelona: Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las técnicas, 2014, p. 315-322. ISBN: 978-84-616-9283-5.

Parshall, Karen Hunger. "The Art of Algebra from Al-khwarizmi to Viète: a study in the natural selection of idees". *History of Science,* 1988, 26, p. 129-164.

Rashed, Roshdi. "L'algèbre" dins *Histoire des sciences arabes 2. Mathématiques et physique*, Seuil: Paris, 1997, pp. 31-54. ISBN: 978-2020620277.

Youschkevitch, Adolf. *Les Mathématiques Arabes (VIII-XV s.)* Paris: Libraire Philosophique Vrin, 1976. ISBN: 978-2711607341.