XVIII Jornada Didàctica

ABEAM

MÀXIMS amb estris MÍNIMS

7 Novembre 2015

Pelegrí Viader. UPF

OBJECTIUS D'AQUESTA LLIÇÓ

Tractar alguns problemes de màxims i mínims:

- El càlcul d'extrems es pot motivar amb aproximacions "suaus"
- Les diferents aproximacions, permeten tractament a diferents nivells (diversitat)
- Es pot treure un gran profit geomètric, algebraic i analític de les diferents aproximacions
- Pot ser una excel·lent font de treballs de recerca

George Pólya

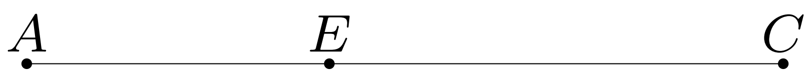
Matemàtiques i Raonament Plausible

(Vol 2, Capítol 8)

Després de resoldre un problema amb veritable comprensió i interès, adquirim un bé molt preuat: un patró, un model, que podem imitar a l'hora de resoldre problemes similars. [...] Desenvolupant aquest patró, finalment podem arribar a un veritable descobriment. Si més no, tenim la oportunitat de dotar-nos d'un coneixement ben ordenat del qual podem disposar en qualsevol moment.

Feina 1: El següent problema va ser enunciat per Fermat (1601–1665) cap els anys 1630.

Dividiu el segment AC (figura) en E de manera que el rectangle $AE \times EC$ sigui màxim



Enunciats alternatius

El problema es pot enunciar de manera diferent:

Entre tots els rectangles de semiperímetre b, trobeu el d'àrea màxima

I també li podem posar un escenari més quotidià

Tenim b metres de filferro per tancar un recinte rectangular. Quines dimensions tindrà el recinte d'àrea màxima?

Amb alumnes de ESO o batxillerat

- Posar algun exemple amb dades concretes.

- Fer un gràfic (Geogebra)

- Fer una taula (Excel)

Conjecturem

Fent un gràfic i/o una taula, la solució és fàcil de conjecturar.

En aquest cas, tant pels que heu fet una taula, com pels que heu fet un gràfic, com pels que heu raonat “geomètricament” per simetria, el quadrat és la solució que se’ns suggereix.

Solució de Fermat (1)

Si diem b al segment AC i x a una de les parts, AE, tenim que l'àrea del rectangle $AE \times EC$ és

$$S = x(b - x).$$

A prop d'un extrem, la funció ha de variar molt poc de valor. Si e representa una quantitat petita:

$$\begin{aligned} S(x+e) &\cong S(x) \qquad \text{[Fermat dirà que són \textit{adiguals}]} \\ (x+e)(b-x-e) &\cong x(b-x) \\ bx - x^2 - 2xe + eb - e^2 &\cong bx - x^2 \end{aligned}$$

Solució de Fermat (2)

Simplifiquem:

$$\begin{aligned} \cancel{bx - x^2} - 2xe + eb - e^2 &\cong \cancel{bx - x^2} \\ -2x\,\cancel{e} + b\,\cancel{e} - e^{\cancel{2}} &\cong 0 \\ -2x + b - e &\cong 0. \end{aligned}$$

Ara, fem $e = 0$,

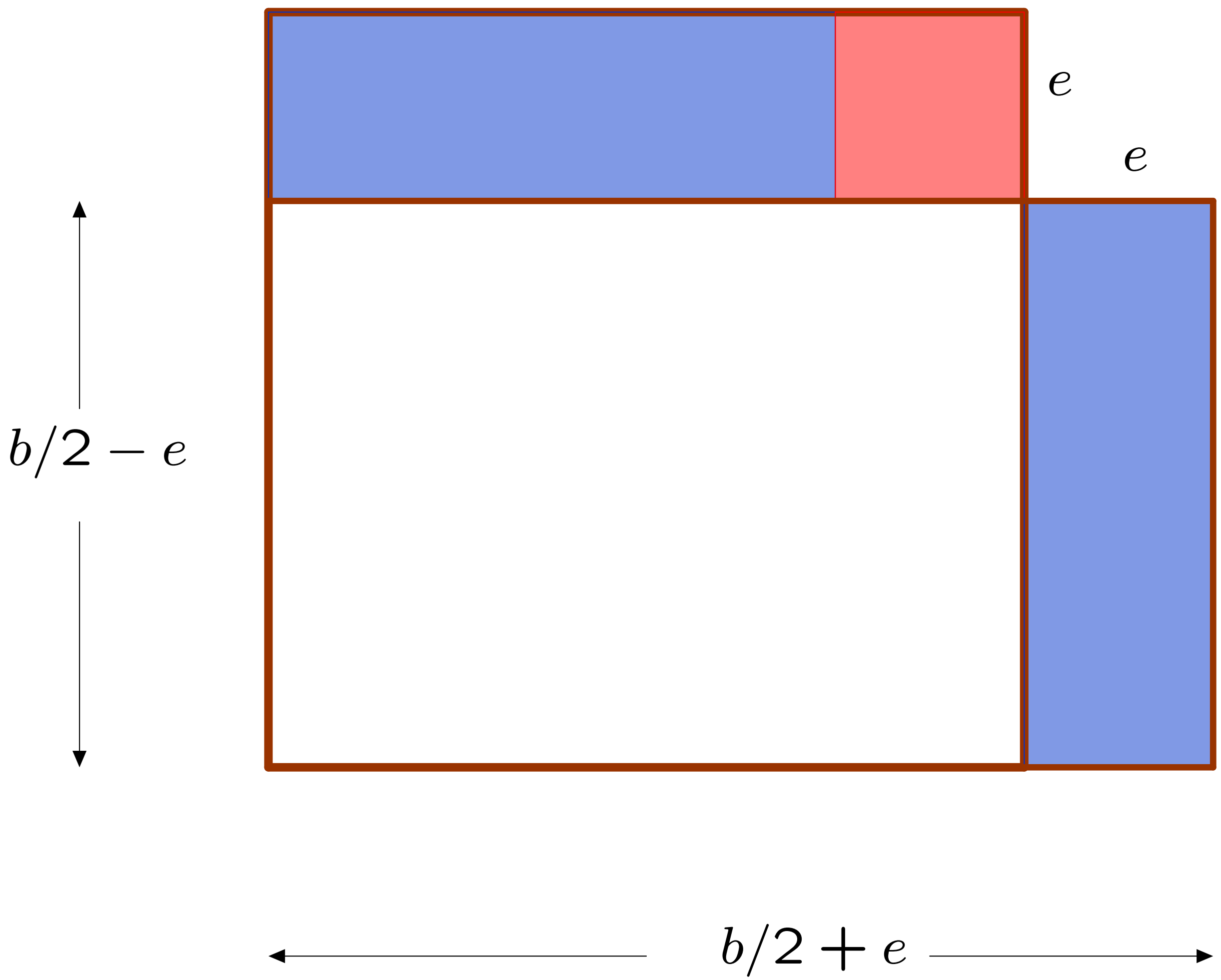
$$-2x + b = 0,$$

i tenim que el màxim es troba per

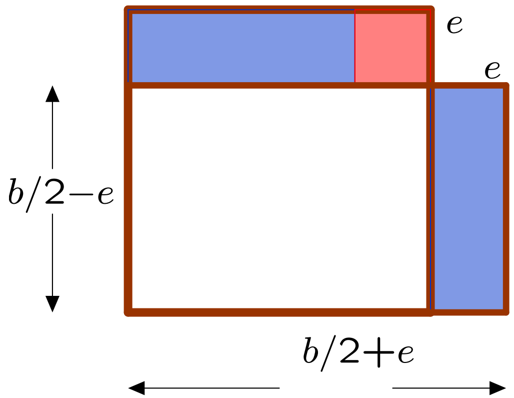
$$x = \frac{b}{2}.$$

La solució és el **quadrat**.

Solució visual



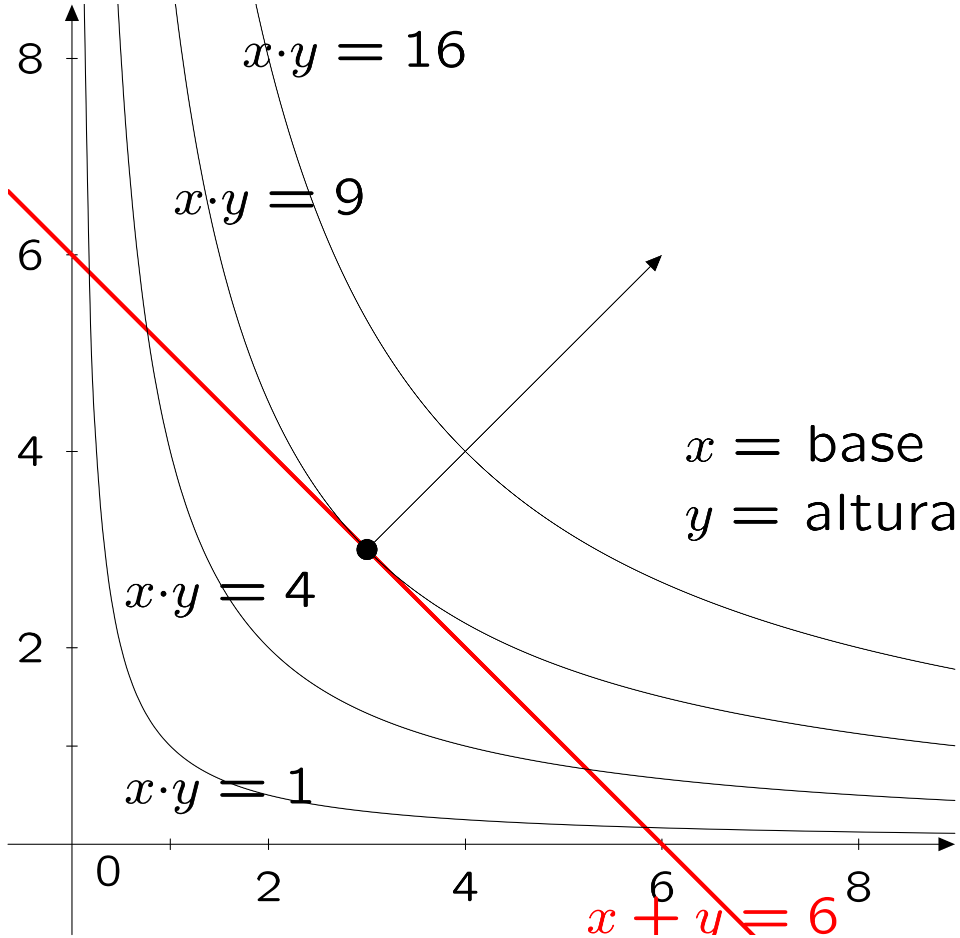
Solució algebraica



La solució és el quadrat de costat $b/2$ i àrea $b^2/4$. Si passem de considerar el tros $x = b/2$ a considerar $x = b/2 - e$, amb $e > 0$, l'àrea passa de $b^2/4$ a

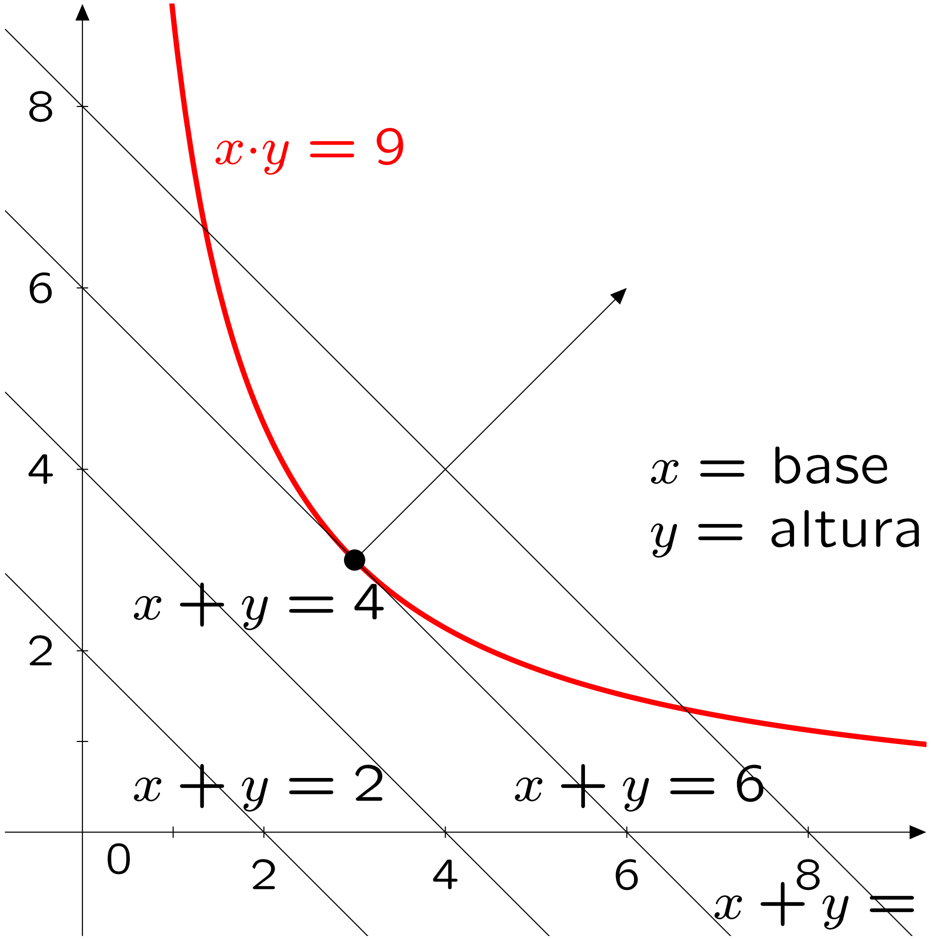
$$\left(\frac{b}{2} - e\right)\left(\frac{b}{2} + e\right) = \frac{b^2}{4} - e^2 < \frac{b^2}{4}.$$

Animació



$x{\cdot}y = 16$
$x{\cdot}y = 9$
$x{\cdot}y = 4$
$x{\cdot}y = 1$
$x + y = 6$
$x =$ base
$y =$ altura
0
2
4
6
8
2
4
6
8

Animació



Feina 2: El problema DUAL de Fermat

Entre tots els rectangles d'àrea donada, A^2, quin és el de semiperímetre mínim?

Dualitat

Siguin f i g funcions diferenciables. Si

$$\boxed{f \text{ té un MÀXIM } f(a,b) = c_1 \text{ en } (a,b) \text{ amb la restricció } g(x,y) = c_2}$$

llavors

$$\boxed{g \text{ té un MÍNIM } g(a,b) = c_2 \text{ en } (a,b) \text{ amb la restricció } f(x,y) = c_1}$$

En el punt (a,b) les dues funcions han de tenir gradients no nuls i proporcionals en el mateix sentit. [A.Segalla, S.Watson, *The College Mathematics Journal*, Vol. 36, No. 3 (May, 2005), pp. 232-235]

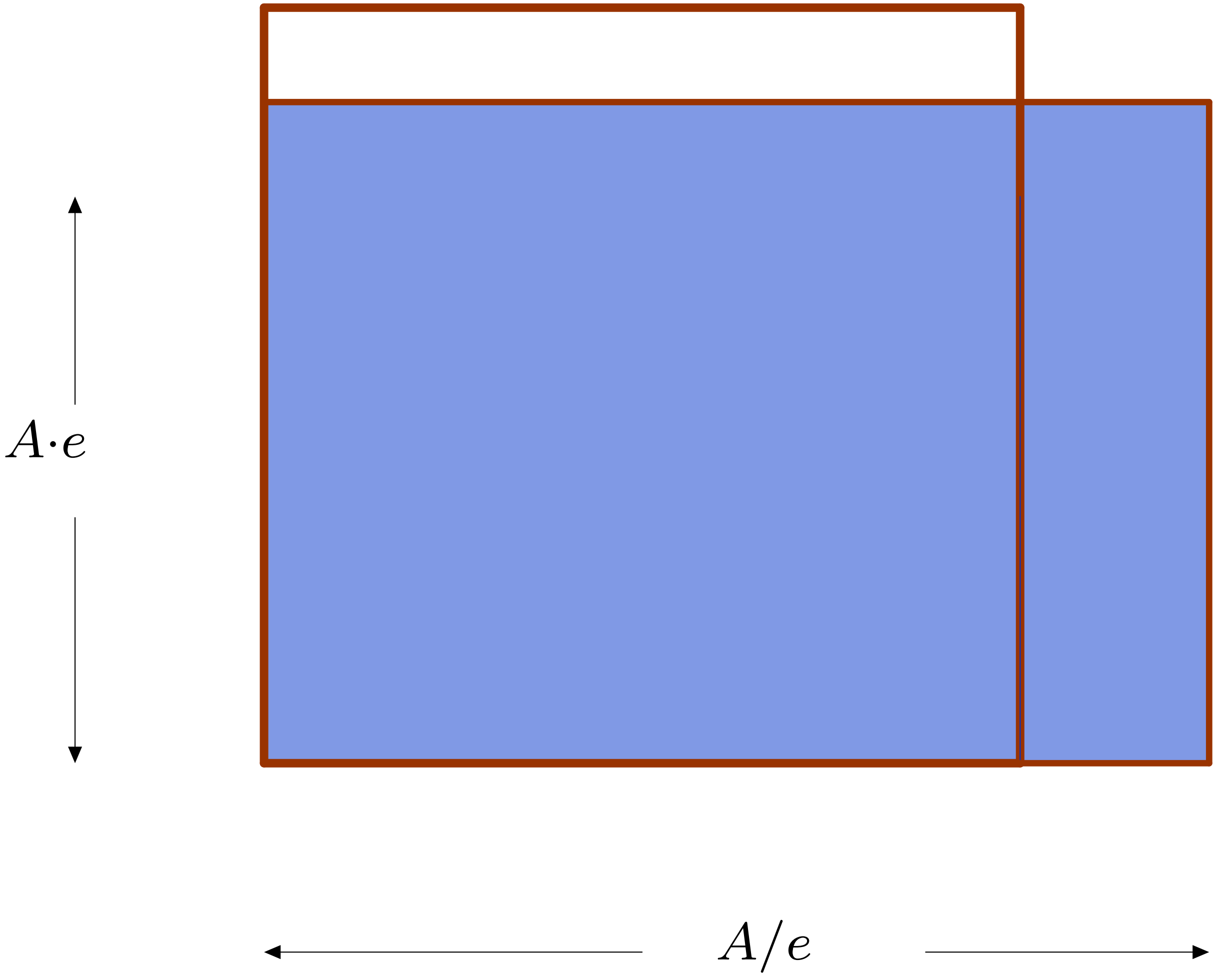
Solució del problema dual de Fermat

Aprofitant el que ara sabem sobre el dual, aquesta solució és immediata: **El quadrat**.

El problema, estudiat amb les mateixes eines que acabem de veure té algunes característiques que el fan diferent (i més complicat). Fem una taula amb (Excel).

Veiem que la solució ha de ser el quadrat. Podem trobar una solució geomètrica com abans?

S'ha perdut la simetria



Solució algebraica

Si l'àrea donada era A^2, la solució és el quadrat de costat A i semi-perímetre $2A$.

Si passem de considerar el quadrat d'àrea A^2 a considerar un rectangle de base $A{\cdot}e$ i altura A/e amb e una quantitat positiva, l'àrea continua sent A^2 i el semiperímetre passa de $2A$ a

$$A{\cdot}e + \frac{A}{e} = A\left(e + \frac{1}{e}\right).$$

Només cal demostrar que $e + \dfrac{1}{e} \geq 2$ per a tot $e > 0$.

Problema

Demostreu que tot nombre positiu, e, sumat al seu recíproc, $1/e$, dóna un valor més gran o igual que 2.

Dem de Roger Asensi (I.E.S. Salvador Dalí (Prat) i Beca CIM-CELLEX (Aula)

$$\begin{aligned} e+\frac{1}{e} &\geq 2 \quad \Leftrightarrow \\ e^2+1 &\geq 2e \quad \Leftrightarrow \\ e^2-2e+1 &\geq 0 \quad \Leftrightarrow \\ (e-1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tot problema de màx/mín demostra una desigualtat i recíprocament.

Desigualtat aritmètico-geomètrica

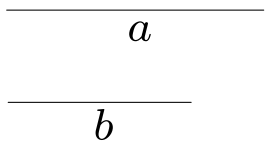
El problema de Fermat ens diu que si $x, y > 0$,

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

és a dir, la mitjana geomètrica de dos nombres és més petita que la mitjana aritmètica (són iguals quan els nombres són iguals).

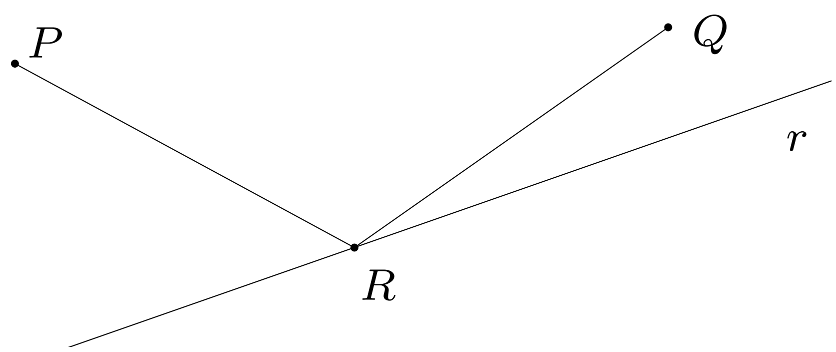
Feina per casa: Donats dos segments, a i b, trobeu el triangle d'àrea màxima que els té com a dos dels seus costats.

Es tracta de seguir el procediment que hem vist: exemple concret, GEOGEBRA, EXCEL i, per últim mirar si trobem alguna solució de manera purament algebraica o geomètrica.



Feina 3: El següent problema va ser resolt per Herò d'Alexandria (10–70).

Donats una recta, r, i dos punts al mateix costat de la recta, P i Q, quin és el punt de la recta, R, tal que $PR + RQ$ és mínim?



Feina 4: D'entre tots els triangles de costat c i d'àrea S, trobeu aquell pel qual la suma dels altres costats, $a+b$ és mínima.

Feina 5: D'entre tots els triangles de costat c i suma donada dels altres dos costats, $a+b$, trobeu el d'àrea màxima.

Feina per casa.

El gol d'Alves. Alves corre per la banda dreta del camp de fútbol i, quan l'angle sota el qual veu la porteria és màxim, xuta i marca gol. On va xutar Alves? [Indicació: feu anar Geogebra per tal de visualitzar el problema]

PROTOCOL PER A PROBLEMES D'EXTREMS

1. Usar valors concrets.

2. Fer un gràfic.

3. Si és possible, fer un Geogebra.

4. Si és possible, fer una taula.

5. Conjecturar la solució.

6. Es pot resoldre el problema geomètricament? Algebraicament? Amb desigualtats?

7. Si no ho hem resolt, escriure el dual i tornar a començar.

Molt del que s'ha explicat a la lliçó està molt millor explicat en els següents llibres:

- Capítol 7 de "¿Qué es la matemática?" de R. Courant i H.Robbins. Ed. Aguilar
  "What is mathematics?" R. Courant and H.Robbins. Revised ed. Oxford Univ. Press, New York-Oxford, 1996.

- Capítol 8 de "Matemáticas y razonamiento plausible" (vol I) de G. Pólya. 1962 Ed Tecnos.
  "Mathematics and Plausible Reasoning" Vols I, II. Princeton Univ. Press. 1954